

Fraktale: Eine Einführung

Dr. Patrick Bangert
algorithmica technologies GmbH
Ausser der Schleifmühle 67
28203 Bremen
Tel.: (0421) 337 4646
p.bangert@algorithmica-technologies.com

Zusammenfassung

Fraktale sind als ästhetische Bilder vielen bekannt. Was allerdings einen Fraktal wirklich auszeichnet und welche Daseinsberechtigungen der Fraktal besitzt sind meistens unbekannt. Hier wird eine kurze Einführung in die Fraktale gegeben.

1. Differentialgleichungen

Die Physik geht an die Natur mit Differentialgleichungen heran. Eine Familie von Gleichungen beschreibt jedes bekannte physikalische Phänomen wie die Elektrizität, die Schwerkraft und die Bewegung von Flüssigkeiten. Um herauszufinden was sich wirklich ereignet, muss man diese Gleichung lösen. Die bedeutet eine Funktion zu finden, die diese Gleichung wahr werden lässt.

In aller Regel ist es unmöglich eine Lösungsfunktion zu finden, die in der gewohnten Form niederzuschreiben ist. Meistens ist man gezwungen die Funktion durch eine Liste von numerischen Werten zu definieren. Diese Form einer Lösung ist bekannt als *numerische Lösung*.

Zum Beispiel ist das Wetter durch einige gekoppelte partielle Differentialgleichungen sehr gut beschrieben. Diese Gleichungen zu lösen, um eine Wettervorhersage zu erstellen, ist eine große Herausforderung aus zwei Gründen: (1) Die numerische Qualität der Lösung erfordert extrem viel Rechnerkapazität, so dass man qualitative Abstriche machen muss und (2) die Genauigkeit der Messdaten die in die numerische Lösung einfließen spielen eine entscheidende Rolle.

Wenn sich ein Eingangswert geringfügig verändert, sollte sich der Lösungswert ebenfalls geringfügig verändern. So die gängige Annahme, die einleuchtend erscheint. Leider ist sie oft falsch. Der Grund ist, dass es in der Realität viele instabile Gleichgewichte gibt.

Als Beispiel stellen wir uns vor, dass wir ein Buch auf unserem Kopf balancieren möchten. Das Buch ist im Gleichgewicht, da es nicht fällt. Allerdings genügt eine relative geringe Kraft um dieses Gleichgewicht zu zerstören. Diese geringe Kraft ruft eine sehr große Veränderung in dem Zustand des System hervor. Das nennt man ein instabiles Gleichgewicht.

In der Natur gibt es eine Reihe von Instabilitäten die durch verschiedene Gewalten an den Tag treten – Stürme, Erdbeben, Tsunamis, Hagel im Sommer usw. Bei all diesen Ereignissen gibt es eine Grenze an Bedingungen. Wenn diese Grenze überschritten wird, dann findet das Ereignis statt und anderenfalls nicht. Diese Grenze ist in der Natur allerdings so dünn, dass es oft nicht praktisch möglich ist eine

Vorhersage mit abschließender Gewährleistung abzugeben. Dies äußert sich bei Wetterprognosen in Aussagen wie der Regenwahrscheinlichkeit anstatt einer Regenvorhersage.

Das Problem der begrenzten Vorhersagbarkeit in vielen Facetten wird in der Mathematik als *Chaos* bezeichnet. Darunter ist natürlich kein heillooses Durcheinander, sondern eben eine gewisse qualitative Unschärfe in der Lösungsgenauigkeit, zu verstehen.

Nachforschungen in diese Richtung ergaben eine Fülle von interessanten Resultaten, so dass die Chaostheorie schnell zu einem großen und prominenten Bereich der Mathematik wurde. Weiter verallgemeinert forsch das Gebiet heutzutage unter dem Namen *dynamische Systeme*.

Ein Teilbereich dieser Forschungen wurde als Fraktalgeometrie bekannt indem man in frühen Jahren Resultate zu visualisieren begann. Diese Visualisierungen wurden aufgrund ihrer ästhetischen Wirkung schnell von Künstlern aufgegriffen und aufgrund ihres Informationsgehaltes von Mathematikern akribisch beforcht.

2. Iteration und die Mandelbrot Menge

Um die Präsentation verständlicher zu machen, schauen wir uns ein Beispiel an. Dazu wählen wir die folgende Gleichung

[Notiz zum Editor: Ich habe hier die LaTeX Variante zur Formelbeschreibung gewählt, falls eine andere Art gewünscht ist, kann ich diese gerne bereitstellen.]

```
\begin{equation}
```

$$x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - x_n \right)$$

```
\end{equation}
```

Um den beschriebenen Prozess zu bearbeiten, müssen wir ein α und ein x_0 wählen. Dann können wir sukzessive alle anderen x_n berechnen. Für unser Experiment wählen wir $\alpha = 3$ und $x_0 = 0,5$. Dann erhalten wir die folgenden Werte

n	x_n	n	x_n
0	0,5	6	0,590
1	0,75	7	0,726
2	0,563	8	0,597
3	0,738	9	0,722
4	0,580	10	0,602
5	0,731	11	0,718

Der Prozess ein Berechnungsergebnis wieder und wieder durch denselben Prozess zu schleusen ist in der Mathematik bekannt als *Iteration*. Wenn die Resultate einer Iteration nach vielen Wiederholungen immer gleich werden, dann sagt man, dass die Iteration *konvergiert*. Diese Iteration konvergiert allerdings zu *zwei* Zahlen anstatt einer. Wenn diese Aufgabe im Kontext einer Prognoseaufgabe der Physik gestellt würde, wüssten wir also nicht, welche Prognose wir abgeben sollten.

Gehen wir davon aus, dass die Werte α und x_0 natürliche, also durch Experimente bestimmte, Werte sind verfügen beide über eine Ungenauigkeit basiert auf der inhärenten Ungenauigkeit einer Messung. Durch einige Versuche, erkennen wir sehr deutlich, dass die oben beschriebene Iteration extrem sensibel auf diese beide Werte reagiert.

In Abbildung 1 zeigen wir diese Komplexität auf. Die horizontale Achse stellt den Parameter α dar und die vertikale Achse die Konvergenzwerte von x_n . Wir erkennen klar einige Grenzen im Spektrum der α -Werte, indem sich die Konvergenzwerte vermehren. Diese Grenzen unterscheiden sich qualitativ wie quantitativ voneinander.

Ab einem gewissen α -Wert gibt es sogar unendlich viele Konvergenzwerte, so dass gar keine Aussagen über das Verhalten von x_n getroffen werden können.

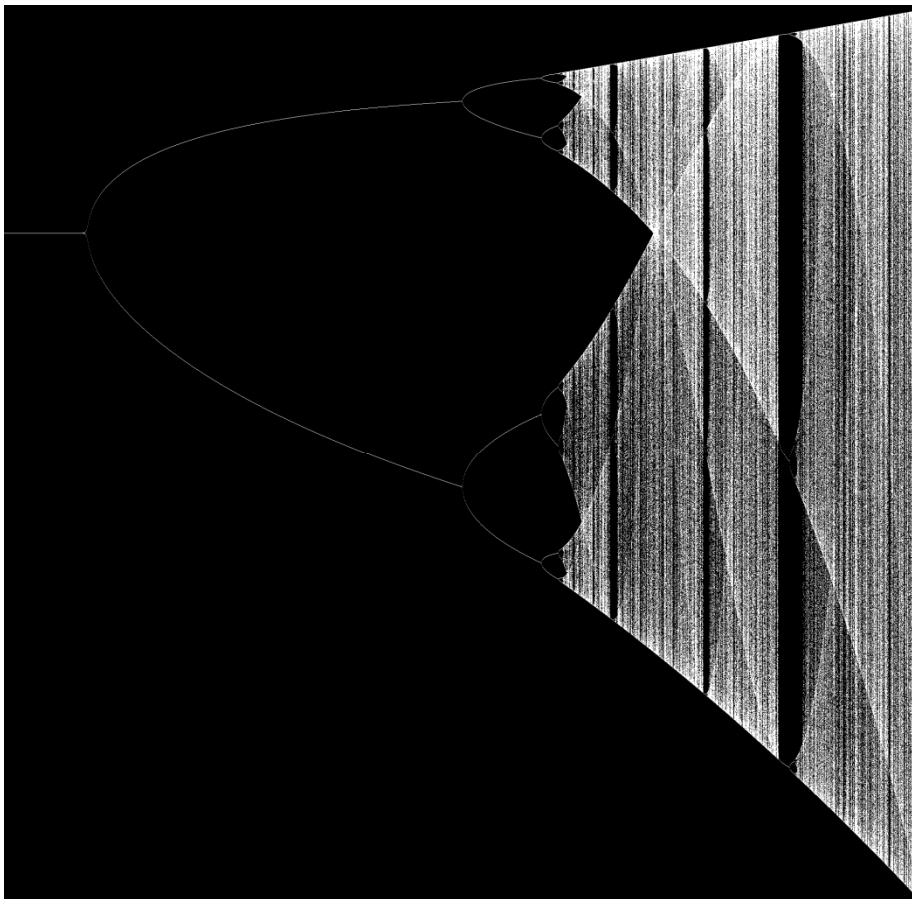


Abb. 1: Die Konvergenzwerte als Funktion des Eingangsparameters α .

Die (mathematische) Menge an Konvergenzpunkten dieses Iterators als Funktion des Eingangsparameters α ist der historisch erste Fraktal. Er wurde durch Berechnungen mit einem der ersten elektronischen Rechenmaschinen von Feigenbaum erforscht.

Nun machen wir ein zweites Experiment. Eine sehr ähnliche Iteration wird durch diese Formel definiert

```
\begin{equation}
```

$$Z_{n+1} = z_n^2 + c$$

```
\end{equation}
```

wobei z_n und c komplexe Zahlen sind. Wie zuvor müssen wir uns für ein z_0 und ein c entscheiden. Dann können wir die Reihe an z_n ausrechnen. Um uns buchstäblich ein Bild davon zu machen, suchen wir wie oben ein Trennkriterium zwischen den Konvergenzwerten. Oben haben wir die Anzahl der Konvergenzpunkte gezählt. Nach ein paar Probedurchläufen erkennen wir schnell, dass ein interessantes Trennkriterium zwischen verschiedenen Punkten die Tatsache ist, ob $|z_n| < 2$ bleibt oder nicht.

Also wählen wir für unser Experiment $z_0 = 0$ und wählen c aus einem 2-dimensionalen Gitter, so dass wir später eine Graphik zeichnen können. Für jedes c rechnen wir aus ob die Reihe aus z_n das Trennkriterium erfüllt oder nicht. Wenn ja, so malen wir diesen Punkt weiß. Alle anderen Punkte werden schwarz gemalt.

Das Resultat ist dann die Abbildung 2, die allgemein als Mandelbrotmenge bekannt ist.

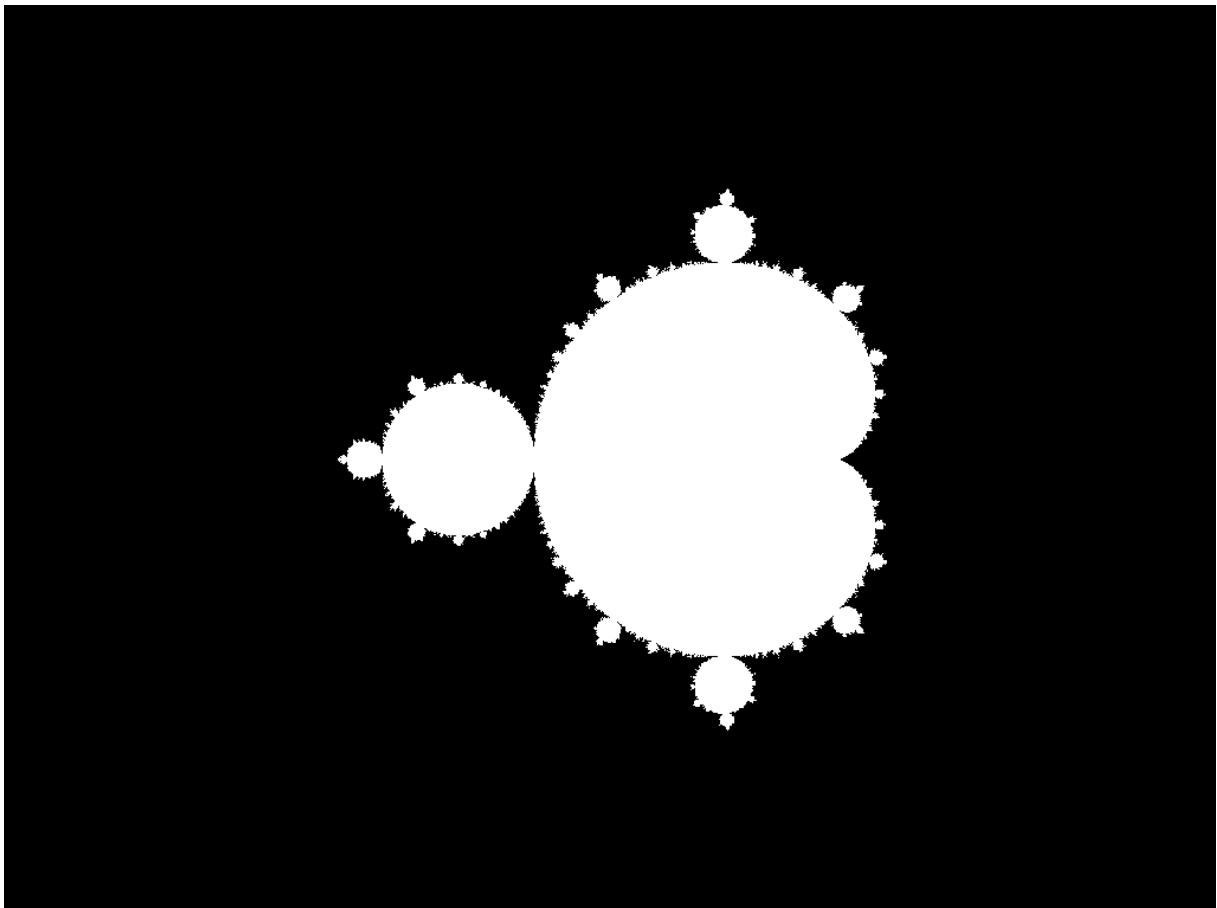


Abb. 2: Die Mandelbrotmenge.

Diese Menge wurde durch Benoit Mandelbrot 1975 entdeckt und berühmt gemacht. Als Fraktal begründete diese Menge einen umfassenden Vorstoß der Mathematik in die Öffentlichkeit und regte ein starkes Interesse der künstlerischen Gemeinschaft an. Das eine kurze Formel zusammen mit einem Trennkriterium in der Lage ist ein so komplexes und ästhetisch schönes Gebilde zu schaffen war bis zu diesem Zeitpunkt unbekannt.

3. Selbstähnlichkeit

Es gibt einige Software Programme die uns erlauben in die Mandelbrotmenge zu zoomen. Werden wir dies tun, so werden wir Strukturen finden die der Menge als Ganzes gleichen. Ein Beispiel sehen wir in Abbildung 3.

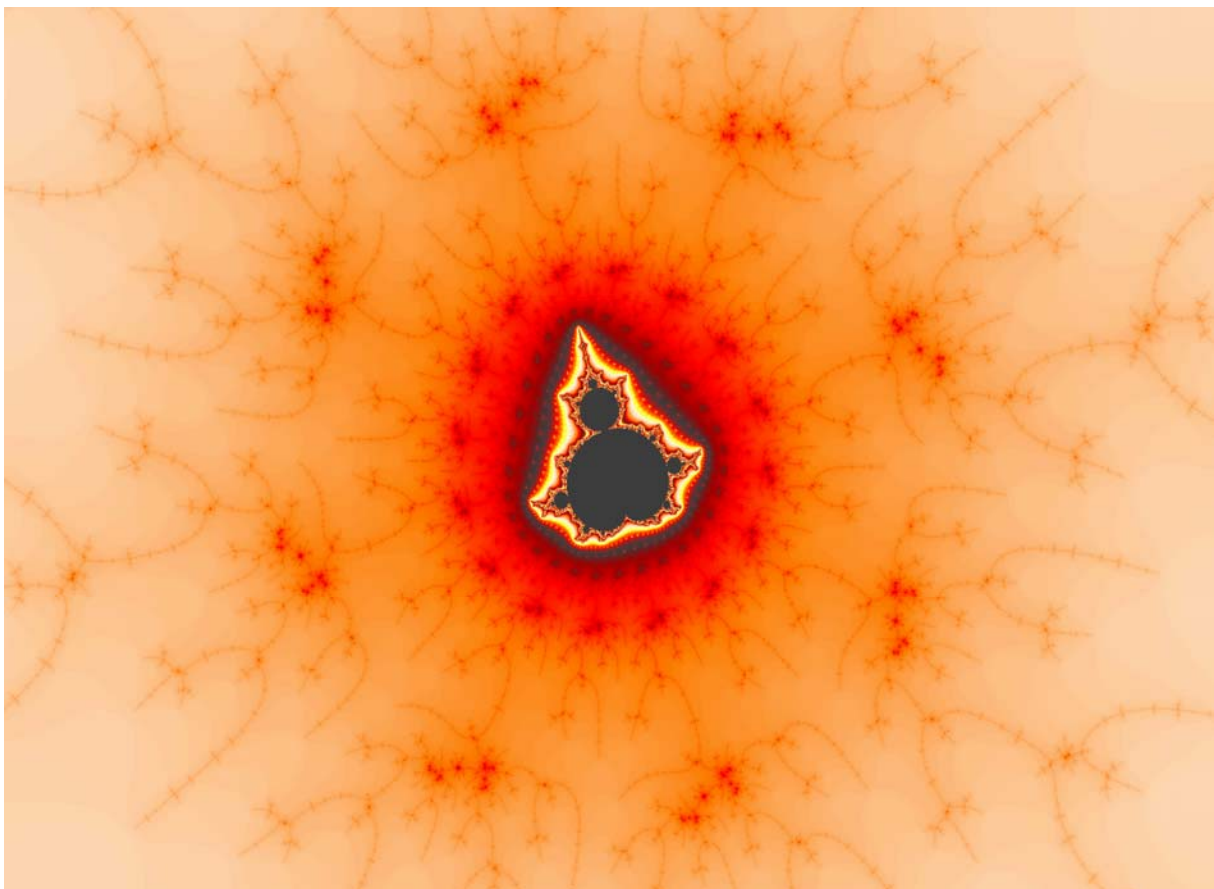


Abb. 3: Eine Detailaufnahme der Mandelbrotmenge.

Diese Ähnlichkeit in der Struktur ist nicht nur eine augenscheinliche, sondern eine mathematisch tatsächliche Gleichheit. Als *Selbstähnlichkeit* bekannt, ist diese Eigenschaft eine essenzielle Eigenschaft der Fraktale. Auf den ersten Blick erscheint diese Eigenschaft der Selbstähnlichkeit sehr eigenartig. Allerdings gibt es auch in anderen Bereichen schon seit hunderten von Jahren das Konzept der Selbstähnlichkeit. Zum Beispiel geht man in der chinesischen Medizin davon aus dass das Ohr oder der Fuß eine komplette Karte des menschlichen Körpers darstellt, so dass wenn das Ohr oder der Fuß

medizinisch behandelt wird der Punkt am menschlichen Körper der krank ist genesen kann. Laut dieser Theorie besitzt also auch der menschliche Körper einer Form der Selbstähnlichkeit.

Tatsächlich erkennen wie hier in der Natur einige Formen der Selbstähnlichkeit, zum Beispiel in Farnen oder in Küstenlinien siehe Abbildungen 4 und 5.



Abb. 4: Ein Farn. Schaut man im Detail auf ein einzelnes Blatt des Farns so erkennt man eine Struktur fast identisch mit dem ganzen Farn.

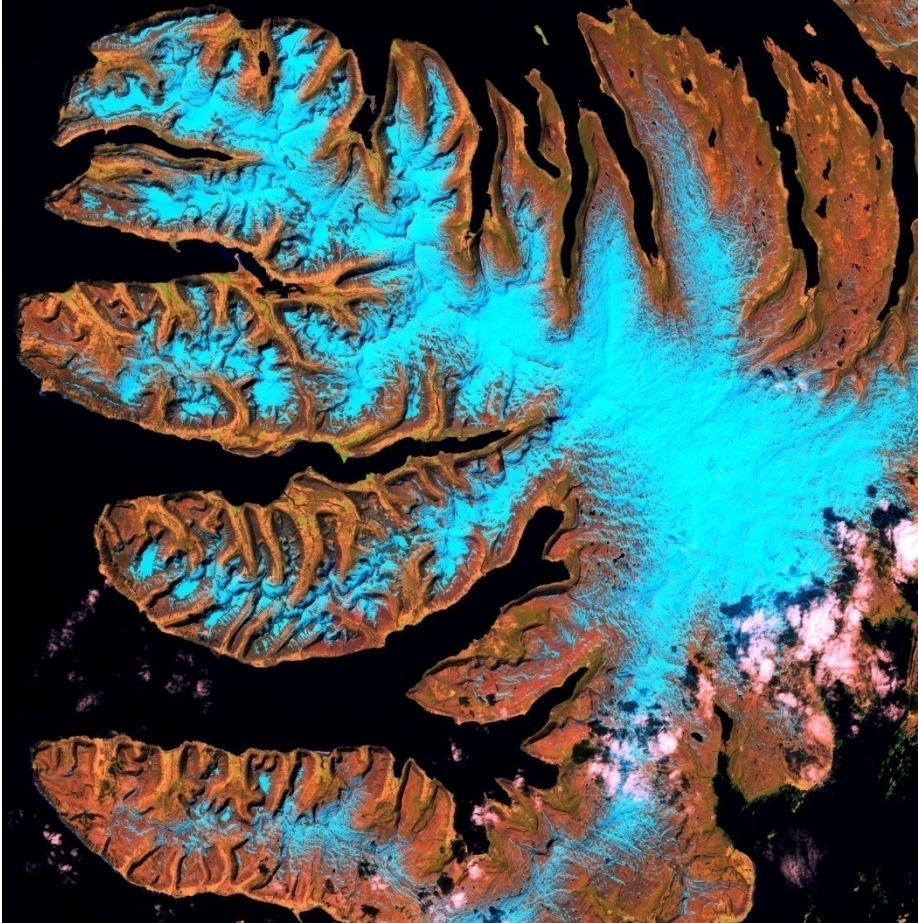


Abb. 5: Eine Landsatfotografie eines norwegischen Fjords. Auch hier zeigen Details des Fjords für uns eine fast identische Struktur mit dem gesamten Fjord auf.

Da die Selbstähnlichkeit eine essenzielle Eigenschaft eines Fraktals ist, liegt aufgrund dieser Beobachtungen die Annahme nahe, dass viele Aspekte der Natur oder sogar die Natur als Ganzes eine fraktale Struktur besitzt. Diese Beobachtung machte Mandelbrot in den Siebzigern sehr berühmt und begann neben der inhärenten Schönheit der Fraktale das öffentliche Interesse in diesen mathematischen Mengen.

In Abbildung 3 sahen wir ein Detail der Mandelbrotmenge in verschiedenen Farben. Diese Farben kommen zu Stande in dem man die Geschwindigkeit der Konvergenz mit einer Farbe kennzeichnet. Wir erinnern uns dass die Konvergenz als solche durch die weiße Farbe und die Abwesenheit der Konvergenz durch die schwarze Farbe gekennzeichnet wurde. Nun werden wir die Geschwindigkeit der Konvergenz ebenfalls durch eine Farbe kennzeichnen. Zunächst einigen wir uns auf eine ausreichende Genauigkeit nach dem wir die Reihe als konvergiert betrachten, zum Beispiel nach fünf Dezimalstellen. Wenn die Konvergenz nach fünf Schritten erreicht wurde, malen wir diesen Punkt in Rot. Wird die Konvergenz erst nach zehn Schritten erreicht, malen wir diesen Punkt in Blau. Regeln dieser Art erlauben uns farbige Fraktale zu zeichnen. Das Farbschema eines Fraktals ist somit nicht inhärent in dem Fraktal selbst, sondern erfolgt durch den Menschen. Somit ist ein Fraktale, der farbiger dargestellt wird, zum Teil eine Darstellung einer mathematischen Menge und zum Teil ein Kunstwerk. Neben dem Farbschema gibt es natürlich auch noch den Ausschnitt der vom Menschen auszuwählen ist. Einige

Fraktale sind in ihrer Gänze ästhetisch schön, die meisten Fraktalbilder allerdings werden erst durch detailliertes Zoomen wirklich bestechend.

4. Dimension und der Fraktalbegriff

Bis jetzt haben wir immer noch keine Definition von „Fraktal“. Auch in der Forschung brauchte man einige Zeit bis man auf die Definition kam die heute gilt. Die Unterscheidung einer mathematischen Menge in Fraktale und nicht-Fraktale erfolgt über die Dimension dieser Menge.

In der Schule haben wir gelernt, dass die Dimension die minimale Anzahl der Zahlen ist, die benötigt wird um einen Ort in der Menge eindeutig zu beschreiben. Somit hat ein Punkt selbst die Dimension null, da keine Angaben notwendig sind um einen Punkt eindeutiger zu machen als er schon ist. Eine Linie hat somit die Dimension eins, eine Fläche die Dimension zwei und ein Körper die Dimension drei. Diese Tatsachen sind uns bekannt und wir gehen normalerweise davon aus das eine Dimension eine ganze Zahl sein muss.

Schauen wir uns das Bild des norwegischen Fjords noch einmal an und versuchen die Länge des Fjords zu messen. Praktisch würde man dies so tun dass man mit einem sehr langen Meterstab die Küste entlang läuft und die Länge der Küste in diesen Meterstablängen misst. Um ein genaueres Ergebnis zu erzielen würde man einen kürzeren und dann einen wieder kürzeren Meterstab für diese Messungen heranziehen. Da die Küstenlinie nicht gerade ist, sondern aus vielen Einbuchtungen besteht, erkennen wir sehr schnell, dass jedes Mal das wir unseren Meterstab kürzer machen, die Länge der Küste wächst. Wir könnten nun auf einer logarithmischen Skala die Größe des Meterstabes mit der gemessenen Gesamtlänge der Küste vergleichen und wir würden eine gerade Linie beobachten. Diese gerade Linie hat eine Steigung. Für den Augenblick definieren wir diese Steigerung, plus die Zahl 1, als die Dimension der Menge, die wir gerade gemessen haben. Bei einer Küste erreichen wir somit eine Dimension von ca. 1,359.

Bis jetzt war dies eine Definition der Dimension. Wir können diese Methode nun bei Punkten, Linien, Flächen und Körpern ausprobieren und wir werden finden dass wir die richtigen Dimensionen durch diese Methode bestimmen. In diesem Aufsatz gibt es nicht genügend Raum die Dimensionslehre in ihrer Gesamtheit zu beschreiben. Die angedeutete praktische Methode um eine Dimension zu bestimmen ist mathematisch untermauert worden und kann allgemein benutzt werden.

Nun kommen wir zur Definition des Begriffs Fraktal. Der *Fraktal* ist eine mathematische Menge, die eine nicht-ganzzahlige Dimension besitzt.

Auf den ersten Blick erscheint dies wieder eine abstrakte und von der Realität ferne Definition. Allerdings erleben und beobachten wir in der Natur ständig Strukturen, die nicht aus wirklich geraden Linien bestehen. Die Natur besteht aus Rundungen und Einbuchtungen. In ihrer nicht-Geradlinigkeit zeigt die Natur ihre wahre Schönheit. Es ist im Bereich der Fraktal, indem die Mathematik ihre nicht geradlinige Schönheit zeigen kann.

5. Ausblick

Nun haben wir ein Basisverständnis für den Fraktal erlangt. Es gibt viele Programme, die im Internet heruntergeladen werden können, die jeden erlauben mit Fraktalen zu experimentieren. Es gibt sehr viele Möglichkeiten mit Fraktalen zu experimentieren. Zuerst sucht man sich die zu iterierende Formel aus. Normalerweise haben die Programme schon eine große Vielfalt an vorprogrammierten Formeln enthalten, somit wird der Benutzer des Programms durch Benennung dieser Formeln von der tatsächlichen mathematischen Formeldarstellung verschont. Es ist allerdings sehr interessant sich nicht nur das schöne Bild, sondern auch die Formel anzusehen um etwas Verständnis zu erlangen über was dieses Bild dann zeigt. Es gibt nämlich eine Reihe von Formeln die in der Fraktalgeometrie genutzt werden, die aus praktischen Forschungsgebieten wie der Wettervorhersage, dem Ingenieurwesen oder anderen physikalischen Phänomenen stammen.

Nachdem man sich für einen Fraktal entschieden hat, so hat dieser normalerweise einige Parameter. Zum Beispiel bei der Mandelbrotmenge haben wir uns entschieden die Zahl 0 als den Anfangspunkt jeder Reihe zu nehmen. Diese Wahl war willkürlich. Wir hätten genauso gut jede andere komplexe Zahl als Anfangspunkt wählen können. Andere Fraktale haben zum Teil mehrere Parameter die frei gewählt werden können.

Als nächstes müssen wir einen Anfangsausschnitt der komplexen Ebene wählen damit wir ein Bild des Fraktals auf dem Bildschirm des Computers angezeigt bekommen können. Alle Programme erlauben das Zoomen, so dass wir einen kleineren Ausschnitt des Fraktals grafisch auswählen können.

Die letzte Wahl, die wir treffen müssen, ist das Farbschema. Normalerweise sind einige Farbschemen schon in den Programmen enthalten. Neben der Struktur des Fraktals als solches, ist das Farbschema für die Ästhetik der Grafik entscheidend.

Wenn wir mit Computerprogrammen und Fraktalen experimentieren, verwenden wir fast unsere gesamte Zeit mit dem Zoomen. Es gibt innerhalb eines Fraktals so viele Strukturen auf so kleinem Detailniveau, dass man selbst bei einem Fraktal wochenlang neue Strukturen durch immer wiederkehrendes Zoomen an verschiedenen Stellen entdecken könnte. Man könnte somit eine Kunstgalerie mit verschiedenen Darstellungen der Mandelbrotmenge füllen und diese Ausstellungen wären nicht langweilig.

In meiner persönlichen Erfahrung auf Ausstellungen und in Vorträgen in denen es um Fraktale ging, waren fast alle Personen von den Strukturen der Fraktale begeistert. Am Farbschema allerdings scheiden sich die Geister. Dort scheint der menschliche Geschmack zu entstehen.

Der Fraktal ist als Kunstwerk einzigartig, da er eine Kombination aus forscherschem Entdecken durch Zoomen und künstlerischer Schöpfung durch das Farbschema ist. Ähnlich wie der Bildhauer, der auf die Frage, wie er eine so schöne Skulptur schaffen konnte, sagte er habe sie nicht geschaffen, er habe nur das Holz Drumherum weg geschlagen, ist die Fraktalkunst eine ähnlich entdeckende und aufzeigende Kunst.

Die moderne Computertechnologie, verbunden mit dem Internet, erlaubt jedem Menschen mit Computer ein Fraktalkünstler zu werden. Man braucht keine Geräte, man muss keine Fertigkeiten über längere Zeit erlernen, man braucht nur etwas Zeit mit einem Fraktalgenerator zu verbringen und daran Spaß zu haben.